Berkala Fisika *ISSN : 1410 - 9662*
Vol. 6, No. 3, Juli 2003, hal. 71 - 78

Komputasi Aliran Panas pada sebuah Batang Logam Dengan Menggunakan Algoritma Numerov dan Bahasa Pemrograman Borland Delphi 6.0

Sumariyah[1], K. Sofyan Firdausi[2] dan Dwi Mulyati[1]
1. *Laboratorium Instrumentasi dan Elektronika Jurusan Fisika UNDIP*
2. *Laboratorium Optik dan Laser Jurusan Fisika UNDIP*

Abstrak

Telah dibuat program komputasi aliran panas sebuah batang logam atau plat dengan menggunakan algoritma Numerov dan bahasa pemrograman Borland Delphi 6.0. Program komputasi aliran panas sebuah batang logam atau plat merupakan penyelesaikan permasalahan syarat batas dan nilai eigen untuk kasus S(x) = 0 dari Persamaan Diferensial Orde II yang mempunyai bentuk persamaan $\frac{d^2y}{dx^2}+k^2(x)y=S(x)$. *Program ini menggunakan Algoritma Numerov yang merupakan penjabaran dari Deret Taylor. dan bahasa pemrograman Delphi 6.0. Algoritma tersebut merupakan metode beda hingga. Penyelesaian Persamaan Diferensial orde II untuk S(x) = 0 berupa grafik fungsi eigen yang secara fisis merupakan aliran panas sebuah batang logam atau plat. Hasil komputasi aliran panas sebuah batang logam atau plat berupa fungsi eigen yang besarnya sama atau berhimpit untuk fungsi eigen analitik dan numerik (program).*

PENDAHULUAN

Permasalahan syarat batas dan nilai eigen banyak dijumpai dalam berbagai bidang terutama dalam permasalahan fisis maupun matematis. Sedangkan untuk syarat batas banyak diperlukan terutama dalam permasalahan-permasalahan yang melibatkan persamaan-persamaan diferensial dalam penyelesaiannya. Jika dikaji untuk permasalahan fisis sendiri maka syarat batas dan nilai eigen banyak digunakan pada fenomena elektromagnetik, hidrodinamika, aliran panas, dan gravitasi yang diselesaikan dari bentuk sederhana persamaan Laplace. Kajian syarat batas dan nilai eigen secara khusus ditemukan pada persamaan Poisson dan Helmholth (persamaan gelombang yang tak tergantung waktu) baik itu gelombang elektromagnetik maupun gelombang mekanik. Dikarenakan persamaan-persamaan matematis dalam fisika itu sangat kompleks (dalam aplikasinya) maka penyelesaian perhitungannya dengan menggunakan bantuan komputer.

Syarat batas dan nilai eigen dapat diselesaikan secara numerik dari persamaan diferensial orde II yang berbentuk

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2(x)y=S(x) \qquad (1)$$

dengan S adalah sebuah bentuk non homogen dan k adalah bilangan kompleks sehingga k^2 merupakan sebuah fungsi real. Sedangkan dalam penelitian ini telah diselesaikan PD orde II tersebut untuk S(x) =0 pada kasus distribusi aliran panas pada plat logam dengan menggunakan bantuan Algoritma Numerov dan perangkat lunak sehingga penyelesaian syarat batas dan nilai eigen akan lebih cepat dan lebih mudah teratasi dari perhitungan secara manual.

ALIRAN PANAS PADA SEBUAH BATANG LOGAM ATAU PLAT

Persamaan aliran panas adalah

$$\nabla^2 u=\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (2)$$

Dengan u adalah temperatur dan α^2 adalah sebuah konstanta karakteristik dari materi saat panas mengalir. Sedangkan bagian radial dari persamaan (2.18) berbentuk

$$\nabla^2 F + k^2 F = 0 \qquad \text{atau}$$

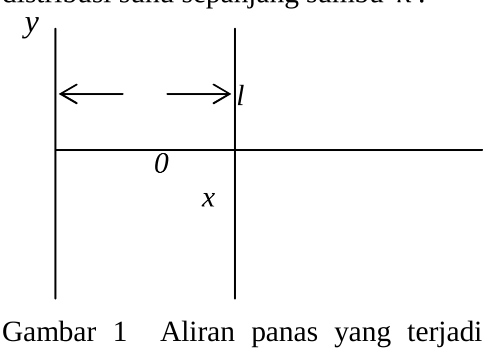
$$\frac{d^2F}{dx^2} + k^2 F = 0\,. \qquad (3)$$

(Untuk permasalahan satu dimensi, F hanya sebagai fungsi x).
Penyelesaian analitik dari (3) adalah

$$F(x) = \begin{cases} \sin kx \\ \cos kx \end{cases}. \qquad (4)$$

Dapat dibandingkan aliran panas yang melalui plat dengan ketebalan l. Diasumsikan bahwa permukaan plat sangat luas sehingga dapat diabaikan beberapa hal dan menganggap bahwa aliran panas hanya pada jarak x (lihat gambar 1).

Permasalahan ini identik dengan aliran panas pada batang logam yang disekat dengan panjang l yang juga terjadi hanya pada jarak x. Anggap plat terjadi pada distribusi suhu *steady state* pada $x = 0$ suhu 0° dan $x = l$ suhu 100°. Pada saat $t = 0$ dan $x = l$ suhu pada dinding (seperti suhu pada dinding $x = 0$) 0°. Nantinya akan didapatkan distribusi suhu sepanjang sumbu x.



Gambar 1 Aliran panas yang terjadi pada batang logam dengan x = 0 dan $x = l$ pada suhu 0º hingga 100º (Boas, 1983).

ALGORITMA NUMEROV

Metode khusus yang sederhana untuk menyelesaikan persamaan (1) adalah dengan Numerov atau metode Cowling. Dengan memperkirakan turunan keduanya untuk tiga nilai yang berbeda :

$$y'' \approx \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} \qquad (5)$$

dengan y'' adalah turunan kedua dari fungsi yang digunakan, y_{-1} adalah fungsi pada beda hingga mundur, y_0 adalah fungsi pada beda hingga tengah, y_1 adalah fungsi pada beda hingga maju, h adalah besarnya lebar langkah yang diambil, sehingga

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} = y_n'' + \frac{h^2}{12} y_n'''' + O(h^4) \qquad (6)$$

bentuk error $O(h^2)$ dapat ditulis secara eksplisit yang didapatkan dari ekspansi Taylor yang berbentuk

$$y(x) = y_0 + xy' + \frac{x^2}{2!} y'' + \frac{x^3}{3!} y''' + \ldots \qquad (7)$$

$$y_{\pm 1} = y(x = \pm h) = y_0 \pm hy' + \frac{h^2}{2} y'' \pm \frac{h^3}{6} y''' + O(h^4). \qquad (8)$$

Dari persamaan diferensial itu sendiri akan didapatkan

$$y_n'''' = \frac{d^2}{dx^2}\left(-k^2 y + S\right)\Big|_{x = x_n}$$

$$= \frac{-\left(k^2 y\right)_{n+1} - 2\left(k^2 y\right)_n + \left(k^2 y\right)_{n-1}}{h^2} + \frac{S_{n+1} - 2S_n + S_{n-1}}{h^2} + O\left(h^2\right) \quad (9)$$

Jika disubstitusikan ke dalam persamaan (9) maka setelah beberapa pengaturan akan dapat ditulis menjadi (Koonin, 1986)

$$\left(1 + \frac{h^2}{12} k^2{}_{n+1}\right) y_{n+1} - 2\left(1 - \frac{5h^2 k_n{}^2}{12}\right) y_n + \left(1 + \frac{h^2 k_{n-1}{}^2}{12}\right) y_{n-1} = \frac{h^2}{12}\left(S_{n+1} + 10S_n + S_{n-1}\right) + O\left(h^6\right) \quad (10)$$

Jika nilai k = 0 maka persamaan (10) akan menjadi:

$$y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + \frac{h^3}{12}\left(S_{n+1} + 10S_n + S_{n-1}\right) + O\left(h^6\right) \quad (11)$$

sedangkan bila nilai S yang bernilai nol maka akan didapatkan persamaan:

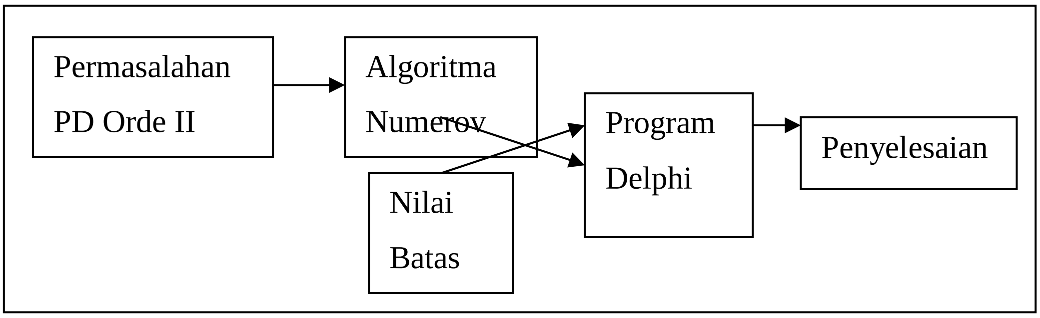
$$y_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{h^2}{12} k_{n+1}^2}\left[2\left(1 - \frac{5h^2}{12} k_n^2\right) y_n - \left(1 + \frac{h^2}{12} k_{n-1}^2\right) y_{n-1}\right] + O\left(h^6\right) \quad (12)$$

METODE PENELITIAN

Pada penelitian ini digunakan metode dengan mengkaji pustaka serta dan menggunakan bantuan komputer untuk mendapatkan hasil akhir yang diharapkan dengan pembuatan program dari bahasa pemrograman Borland Delphi 6.0 yang berpedoman pada tahapan penyelesaian Algoritma Numerov.

Diagram blok

Untuk lebih jelasnya proses yang perlu ditempuh untuk mendapatkan hasil akhir dapat dilihat pada diagram blok pada gambar 2 untuk permasalahan syarat batas dan nilai eigen.



Gambar 2. Diagram Blok Penelitian

Permasalahan-permasalahan fisis yang berbentuk persamaan diferensial orde II diubah menjadi bentuk numerik dengan menggunakan Algoritma Numerov. Kemudian akan dibuat programnya dengan bahasa pemrograman Borland Delphi 6.0 dengan memberikan nilai-nilai batasnya. Penyelesaian yang didapatkan akan dikalibrasi dengan bahasa pemrograman Pascal. Pada penyelesaian akan didapatkan harga fungsinya untuk kasus $k^2(x)$=0. yang merupakan distribusi aliran panas pada plat logam. Permasalahan-permasalahan fisis untuk kasus $S(x)$ = 0 yang akan dikaji dalam penelitian ini adalah aliran panas pada sebuah batang logam atau plat. Pada penyelesaian programnya akan didapatkan nilai eigennya atau aliran panasnya.

Metode uji

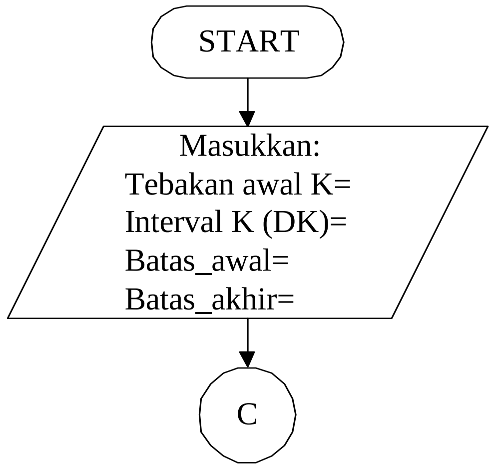
Sebagai pengkalibrasi akan digunakan:

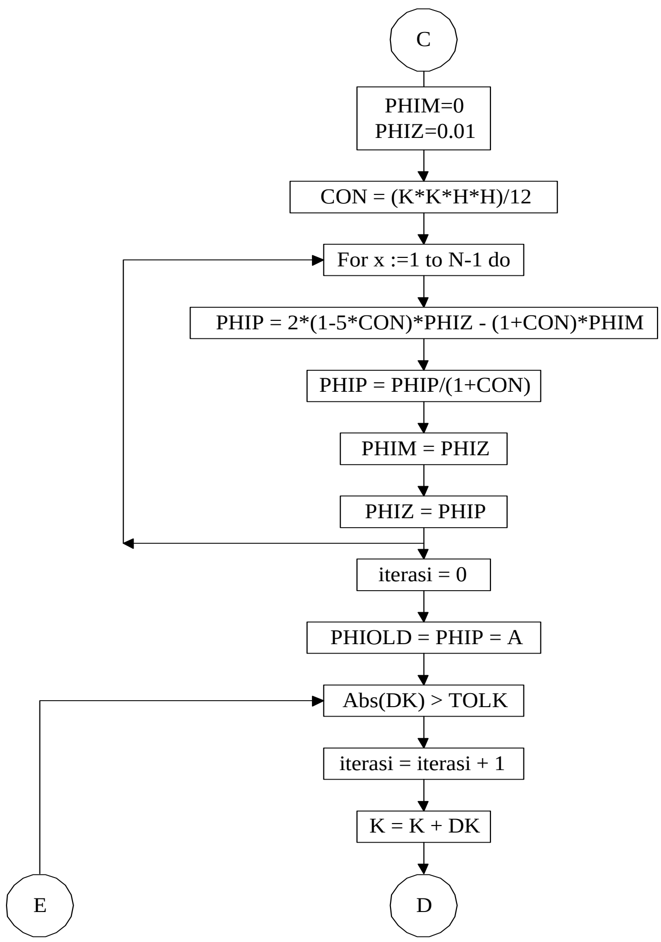
- Perhitungan secara analitik
- Penyelesaian dengan menggunakan bahasa pemrograman Pascal

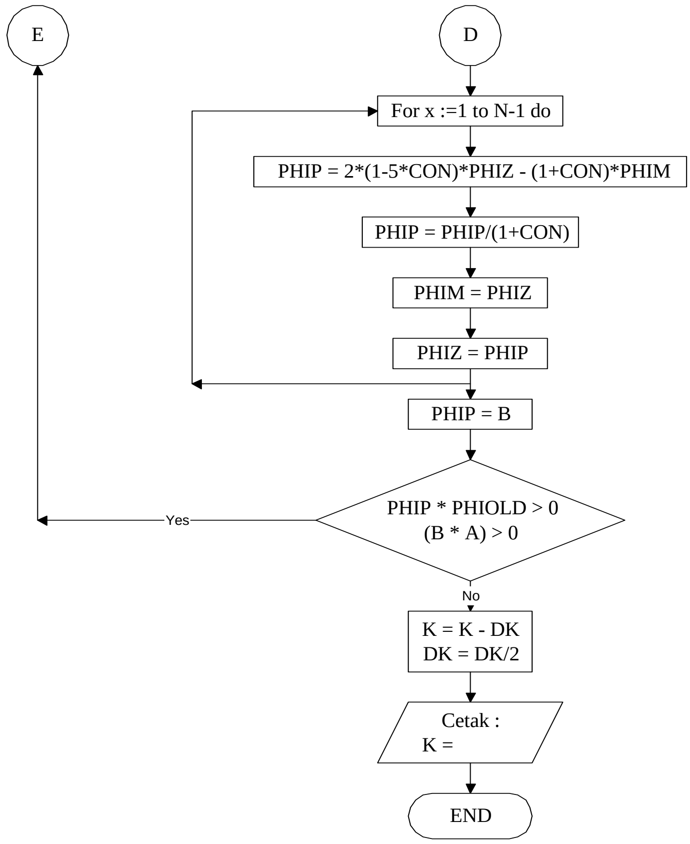
Keluaran dari pemrograman Delphi akan dibandingkan hasilnya dengan menggunakan perhitungan secara analitik dan/atau dengan bahasa pemrograman Pascal. Dari perbandingan inilah akan diketahui keakuratan dari hasil yang telah diperoleh dari bahasa pemrograman Delphi hingga akan dapat diketahui pula benar tidaknya program Delphi yang telah dibuat.

Diagram alir program pada S(x)=0

Pada kasus komputasi aliran panas akan mempunyai harga *S(x)* = 0. Diagram alir program untuk kasus liran panas dan partikel bebas yang mempunyai *S(x)* = 0 diagram alir programnya seperti pada gambar 3.







Gambar 3 Diagram alir program pada S(x) = 0.

Keterangan:

K = nilai eigen
DK = interval K
N = jumlah interval sepanjang batasan yang diberikan
H = lebar langkah dalam range batasan yang ada
Tiga interaksi dari y atau nilai fungsinya yang perlu ditinjau meliputi:

- PHIM = y_{n-1} yang merupakan nilai fungsi sebelum y sesungguhnya
- PHIZ = y_n yang merupakan nilai fungsi sesungguhnya
- PHIP = y_{n+1} yang merupakan nilai fungsi setelah y sesungguhnya

PHIOLD = nilai fungsi yang lama atau pertama diperoleh
TOLK = toleransi dari nilai eigen yang disimbolkan dengan K

Dilakukan penebakan harga awal K setelah dilakukan pemasukan data-data untuk Batas_awal, Batas_akhir, N, dan DK. Selanjutnya dalam prosedur harga-harga tersebut akan diolah untuk mendapatkan harga PHIP. Harga PHIOLD = PHIP yang dianggap sama dengan A. Selama Abs(DK) > TOLK maka harga K = K + DK kemudian akan diproses lagi dalam prosedur yang sama hingga didapatkan PHIP yang dianggap sama dengan B. Jika PHIP * PHIOLD > 0 atau B*A > 0 maka harga K=K+DK tetapi jika tidak terpenuhi maka harga K=K–DK dengan DK = DK/2. Maka pada akhir program sebagai outputnya dapat diketahui K dengan disertai iterasinya.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dari hasil program komputasi aliran panas pada sebuah batang logam atau plat akan dibahas nilai eigen yang telah diperoleh dan fungsi eigen yang menyertainya.

Program mencari nilai eigen

Aliran panas pada sebuah batang logam akan sesuai dengan persamaan diferensial orde II jika S(x) = 0. Pada kasus S(x) = 0 akan didapatkan nilai eigen dari perhitungan secara analitik dengan numerik yang datanya ada pada tabel 1 berikut untuk batas $0 < x \leq 1$.

Tabel 1. Nilai eigen secara analitik dan numerik untuk batas $0 < x \leq 1$

No.	Nilai eigen		Ralat
	Analitik	Numerik	
1	3.14286	3.14159	0.00127
2	6.28571	6.28317	0.00254
3	9.42857	9.42477	0.00380
4	12.57143	12.56636	0.00507
5	15.71429	15.70795	0.00634
6	18.85714	18.84955	0.00759
7	22.00000	21.99113	0.00887
8	25.14286	25.13272	0.01014
9	28.28571	28.27431	0.01140
10	31.42857	31.41588	0.01269

Dari tabel 1 dapat diketahui bahwa nilai eigen yang didapatkan secara analitik dan numerik mempunyai selisih harga yang kecil sehingga ralatnya juga kecil.

Fungsi eigen

Fungsi eigen yang diperoleh secara analitik dan numerik untuk batas $0<x\leq1$ yang digunakan sebagai contoh adalah tiga nilai eigen pertama yaitu 3.14286, 6.28571, dan 9.42857. Untuk melihat perbedaan antara ketiga grafik pada batas yang sama tersebut maka dibuat grafik gabungannya pada gambar 4. Karena perbedaan antara perhitungan analitik dan numerik memberikan ralat yang relatif sangat kecil, maka hasil tampilan grafik pada gambar 4. terlihat fungsi eigen analitik dengan numerik hampir berhimpit. Hal ini dapat juga dilihat pada data tabelnya bahwa antara kedua fungsi eigen mempunyai data-data yang hampir sama sehingga ralat-ralatnya pun selalu berkisar pada harga sekitar nol.

Pada grafik di atas dapat diketahui juga bahwa pada nilai eigen yang bernilai 1π (=3.14286) akan mempunyai grafik dengan satu puncak, nilai eigen yang bernilai 2π (=6.28571) akan mempunyai grafik dengan dua puncak atau membentuk satu gelombang, dan pada nilai eigen yang bernilai 3π (=9.42857) akan mempunyai grafik dengan tiga puncak. Grafik-grafik yang ada tersebut sesuai dengan bentuk persamaan gelombang sinus yaitu sin kx dengan k merupakan nilai eigen yang telah diperoleh dan x merupakan interval dari batasan yang kita gunakan.

KESIMPULAN

1. Telah dibuat program untuk menyelesaikan permasalahan syarat batas dan nilai eigen dari Persamaan Diferensial Orde II yang mempunyai bentuk persamaan $\frac{d^2x}{dy^2} + k^2(x)y = S(x)$ untuk S(x)=0 .
   a. Besarnya ralat menunjukkan besarnya perbedaan penyelesaian secara numerik dengan analitik.
2. Komputasi aliran panas pada sebuah batang logam atau plat diperoleh.
   a. Nilai eigen yang didapatkan secara analitik dan numerik mempunyai selisih harga yang kecil sehingga ralatnya juga kecil.
   b. Fungsi eigen analitik dan numerik mempunyai ralat yang sangat kecil sehingga terlihat berhimpit pada grafiknya.

DAFTAR PUSTAKA

Boas, Mary L, 1983, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, Edisi ke-2, John Wiley and Sons, New York.

Conte, Samuel D, 1992, *Dasar-dasar Analisis Numerik (Suatu Pendekatan Algoritma)*,Edisi ke-3, Penerbit Erlangga, Jakarta.

Koonin, Steven E, 1986, *Computational Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc, Yogyakarta.

Krane, Kenneth S, 1992, *Fisika Modern*, Penerbit Universitas Indonesia, Jakarta.

Kreith, Frank, 1986, *Prinsip-prinsip Perpindahan Panas*, Edisi ke-3, Penerbit Erlangga, Jakarta.

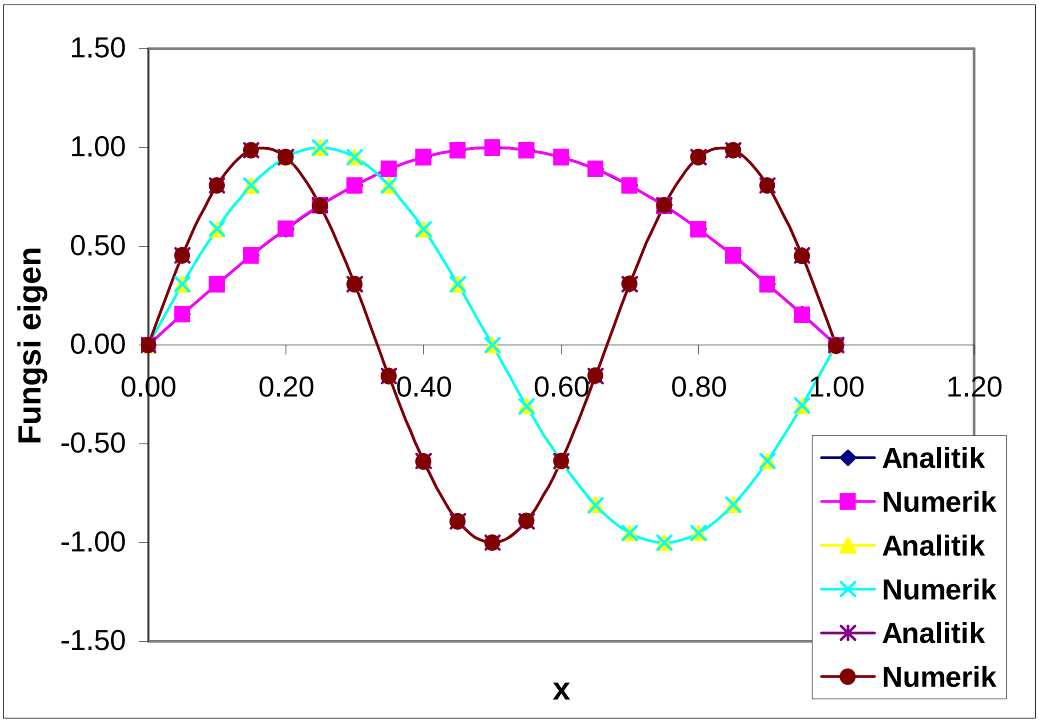
Kreyszig, Erwin, 1993, *Advanced Engineering Mathematic*, Edisi ke-7, John Wiley and Sons, New York.

Pramono, Djoko, 1999, *Mudah Menguasai Delphi 3*, Jilid I dan II, PT. Elex Media Komputindo, Jakarta.

Pranata, Antony, 2000, *Pemrograman Borland Delphi*, Edisi ke-3, Penerbit ANDI Yogyakarta, Yogyakarta.

Scheid, Francis, 1992, *Seri Buku Schaum (Teori dan Soal-soal) Analisis Numerik*, Penerbit Erlangga, Jakarta.

Soedojo, Peter, 1995, *Asas-asas Matematika Fisika dan Teknik*, Gadjah Mada University Press, Yogyakarta.



Gambar 3 Diagram alir program pada S(x) = 0.